Esercitazioni di Analisi Matematica 1
Ingegneria Edile-Architettura – Prof. A. Bonfiglioli

Foglio 0 - Ripasso di insiemistica e Funzioni

► **Esercizio** 1. Stabilire quali delle seguenti frasi sono vere o false:

1. Si può scrivere $1 \subseteq \{1,2\}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
2. Si può scrivere $2 \in \{1,2\}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
3. La scrittura $\varnothing \subseteq \{1,2,3\}$ è sbagliata $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
4. La scrittura $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\}$ è priva di senso $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
5. La scrittura $\{1,2,3\} \setminus \{a,b,c\}$ è priva di senso $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
6. $\{1,2,3\} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
7. $A \setminus B \subseteq A$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
8. La scrittura $\{1\} \in \Big\{\{1\},\{1,2\},\{2\}\Big\}$ è corretta $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
9. $1 \in \mathbb{N}$ vel $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
10. $1 \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
11. La negazione di: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathcal{P}(n)$ è: $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
12. La negazione di: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathcal{P}(n)$ è: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\neg\,\mathcal{P}(n)$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
13. La negazione di: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ è: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $\neg\,\mathcal{P}(n)$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
14. La negazione di: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ è: $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
15. L'implicazione $\neg\,\mathcal{A} \Longrightarrow \neg\,\mathcal{B}$ è la negazione logica di $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
16. L'implicazione $\neg\,\mathcal{A} \Longrightarrow \neg\,\mathcal{B}$ è la negazione logica di $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
17. L'implicazione $\neg\,\mathcal{A} \Longrightarrow \neg\,\mathcal{B}$ è equivalente a $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
18. Se $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ allora $\neg\,\mathcal{A} \Longrightarrow \neg\,\mathcal{B}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
19. Se $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ allora $\neg\,\mathcal{B} \Longrightarrow \neg\,\mathcal{A}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$
20. Se $\neg\,\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ allora $\neg\,\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

Soluzioni:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V

▶ **Esercizio** 2. Qualunque cosa voglia dire, trovare quale delle seguenti è la negazione della frase

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tale che} \quad \forall\, n \geq n_0 \text{ et } \forall\, x \in [0,1] \quad \text{si ha} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1. $\exists\, \varepsilon > 0$ et $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ et $\exists\, x \in [0,1]$ tali che $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$
2. $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ esiste $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall\, n \geq n_0$ et $\forall\, x \in [0,1]$ si ha $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$
3. $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists\, n \geq n_0$ et $\exists\, x \in [0,1]$ tali che $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

[**Soluzione:** La negazione corretta è la 3.]

▶ **Esercizio** 3. Per ciascuna delle seguenti relazioni tra $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ stabilire se sono funzioni o no, e in caso positivo stabilire se sono iniettive, suriettive, biettive:

1. relazione $\Big\{(a,1),(a,2),(b,1),(c,2),(d,1)\Big\}$
2. relazione $\Big\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,1)\Big\}$
3. relazione $\Big\{(a,1),(b,2),(c,3)\Big\}$
4. relazione $\Big\{(a,1),(b,4),(c,3),(d,2)\Big\}$
5. relazione $\Big\{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)\Big\}$

Usare la seguente tabella, spuntando il campo in caso positivo:

relazione:	funzione	iniettiva	suriettiva	biettiva
1				
2				
3				
4				
5				

Soluzione:

relazione:	funzione	iniettiva	suriettiva	biettiva
1				
2	✓			
3				
4	✓	✓	✓	✓
5	✓			

► **Esercizio** 4. Per ciascuna delle seguenti funzioni definite su $A = \{a, b, c, d\}$ e a valori in B stabilire, al variare di B come di seguito specificato, se sono iniettive, suriettive, biettive e, in ogni caso, trovare l'insieme immagine $f(A)$:

1. $B = \{1, 2\}$; funzione $a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 2, \quad d \mapsto 1$
2. $B = \{1, 2, 3\}$; funzione $a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 2, \quad d \mapsto 1$
3. $B = \{1\}$; funzione $a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 1, \quad d \mapsto 1$
4. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; funzione $a \mapsto 2, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 3, \quad d \mapsto 5$
5. $B = \{1, 2, 3, 5\}$; funzione $a \mapsto 2, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 3, \quad d \mapsto 5$
6. $B = \{1, 2, 3\}$; funzione $a \mapsto 1, \quad b \mapsto 3, \quad c \mapsto 1, \quad d \mapsto 3$
7. $B = \{1, 5\}$; funzione $a \mapsto 1, \quad b \mapsto 5, \quad c \mapsto 5, \quad d \mapsto 5$

Riempire la seguente tabella, spuntando il campo in caso positivo, e scrivere $f(A)$:

funzione:	$f(A)$	iniettiva	suriettiva	biettiva
1				
2				
3				
4				
5				
6				
6				

Soluzione:

funzione:	$f(A)$	iniettiva	suriettiva	biettiva
1	{1,2}		✓	
2	{1,2}			
3	{1}		✓	
4	{1,2,3,5}	✓		
5	{1,2,3,5}	✓	✓	✓
6	{1,3}			
6	{1,5}		✓	

▶ **Esercizio** 5. Dimostrare che se $f : A \to B$ ammette una (cosiddetta) inversa a sinistra, ossia

$$\exists\, g : B \to A \quad \text{tale che} \quad g(f(a)) = a \quad \forall\, a \in A,$$

allora f è iniettiva.

Dimostrare che se $f : A \to B$ ammette una (cosiddetta) inversa a destra, ossia

$$\exists\, g : B \to A \quad \text{tale che} \quad f(g(b)) = b \quad \forall\, b \in B,$$

allora f è suriettiva.